



TITLE:

時空間様相論理ETSLの完全・無矛盾な公理系(計算機科学の基礎理論とその応用)

AUTHOR(S):

岩沼, 宏治; 原尾, 政輝; 野口, 正一

CITATION:

岩沼, 宏治 ...[et al]. 時空間様相論理ETSLの完全・無矛盾な公理系(計算機科学の基礎理論とその応用). 数理解析研究所講究録 1985, 556: 306-318

ISSUE DATE:

1985-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98948>

RIGHT:

306

時空間様相論理 E T S L の 完全・無矛盾な公理系

岩沼宏治⁺ 原尾 政輝⁺⁺ 野口 正一⁺

Koji IWANUMA Masateru HARA0 Syoichi NOGUTI

⁺ 東北大学電気通信研究所 ⁺⁺ 山形大学工学部

⁺ Research Institute of Electrical Communication, TOHOKU University

⁺⁺ Faculty of Engineering, YAMAGATA University

1 序論 並列システムの性質の記述, 検証は近年その重要性を増してきている. システムの時間的性質を扱うため時制論理等が研究されているが, 複数のプロセス相互の結合より生じる空間的性質を扱った研究は極めて少ない[4]. 本稿では時間と空間双方を扱う時空間様相論理 E T S L [2, 3] の完全かつ無矛盾な公理系を示す. これは時間と空間に対する論理としては初の試みである.

2 時間と空間のモデル 本稿では, 連結有向グラフ(以下, 空間グラフ)を空間と考え, 時間は離散的, 線形順序構造を持つと仮定する. また時間の流れは空間のどこでも一様と仮定する. また任意の空間座標(グラフの節点)は任意の時刻に独自の状態(以下, 世界)を持つとする. 以上より時空間は世界は格子状に並んだものとしてモデル化出来る. このとき世界は相互に時間的, 空間的に結合しているから, これを時間リンク, 空間リンクと呼ぶ2項関係で表現する.

3 E T S L 正規プログラムの命題ダイナミック論理(以下, PDL) [1, 5] に対して, プログラムを上記のリンクと解釈し直し, 意味領域を, 時空間モデルと整合するものに限定する. 更に位置を指定する演算子“ $\llbracket v_i \rrbracket$ ”を付加したものが E T S L である. 以下の空間グラフに附随して定義する.

【定義】 空間グラフ $G = \langle VG, LG, EG, \rangle$ とは以下の連結グラフである.

VG ; 節点の可算集合

LG ; 弧ラベルの可算集合

EG ; $LG \rightarrow 2^{VG \times VG}$, 各ラベルを持つ弧がどの節点間にあるのかを決める関数

又, 空間グラフ G が有限であるとは, VG 及び LG が有限である時を言う. ■

基底の原子記号の集合は Φ_0 , Σ_0 の2つである.

Φ_0 ; 命題定数 True を含む, 素命題の可算集合,

$\Sigma_0 = LG \cup \{N\} \cup \{T\}$, 原子リンクの可算集合

任意の弧ラベル $A_i \in LG$ は空間リンクであり, 世界間の空間的結合を示す2項関係の名前である. T は空間全リンクと呼び, 2つの世界が同時刻にあることを示す2項関係の名前である. N は唯一の時間リンクであり, 時間的結合関係を示す2項関係の名前である.

【定義】 論理式の集合 Φ , リンクの集合 Σ は以下のもの.

1) $P \in \Phi_0$ なら, $P \in \Phi$

2) $p, q \in \Phi$, $a \in \Sigma$ なら, $v_i \in VG$ なら,

$$\sim p, p \wedge q, \langle a \rangle p, [v_i] p \in \Phi$$

3) $A \in \Sigma_0$ なら, $A \in \Sigma$

4) $a, b, c \in \Sigma$ (但し c 中には N が出現しない), $p \in \Phi$ なら,

$$a ; b, a \cup b, a^*, p?, c^- \in \Sigma \quad \blacksquare$$

[a] p で $\sim \langle a \rangle \sim p$ を略記し, \vee, \supset, \equiv も通常通りとする. PDL では Σ_0 の元は“プログラム”と解釈するが, 形式的に見れば世界間の2項関係の名前をあらわす単なる記号であり, その必要性は無い. 本稿では“リンク”(即ち時空間中のパス)と解釈し直した. 次に意味を与える.

【定義】 意味領域(以下, 構造)は次の4項組 M である.

$$M = \langle S, \pi, \rho, \phi \rangle$$

S ; 世界の可算集合

π ; $\Phi \rightarrow 2^S$, 論理式が成り立つ世界を決める関数で, $\pi(\text{True}) = S$ なるもの.

ρ ; $\Sigma \rightarrow 2^{S \times S}$, 世界間のリンクによる結合関係を決める関数

ϕ ; $S \rightarrow VG$, 世界の空間座標(グラフ G の節点)を決める関数

次の性質1)~10) と後述の11)~13) を満たす M を E T S L モデルと呼ぶ.

- 1) $\rho(a; b) = \rho(a) \circ \rho(b)$ (関係の合成)
- 2) $\rho(a \cup b) = \rho(a) \cup \rho(b)$ (関係の集合和)
- 3) $\rho(a^*) = (\rho(a))^*$ (反射的推移的閉包)
- 4) $\rho(a^-) = \{(t, s) \mid (s, t) \in \rho(a)\}$
- 5) $\rho(T) = (\bigcup_{A_i \in LG} \rho(A_i \cup A_i^-))^*$

- 6) $\rho(p?) = \{(s, s) \mid s \in \pi(p)\}$
- 7) $\pi(\sim p) = S - \pi(p)$
- 8) $\pi(p \wedge q) = \pi(p) \cap \pi(q)$
- 9) $\pi(\langle a \rangle p) = \{s \in S \mid \exists t((s, t) \in \rho(a), t \in \pi(p))\}$
- 10) $\pi(\llbracket v_i \rrbracket p) = \{s \in S \mid \phi(s) = v_i, s \in \pi(p)\}$ ■

以下 $s \in \pi(p)$ を $M, s \models p$ で、適宜略記していく。さて $M, s \models \langle a \rangle p$ は、世界 s からリンク a で連結し、かつその上で論理式 p が成り立つある世界 t が存在する、ことを意味する。 $M, s \models \llbracket v_i \rrbracket p$ は、世界 s の空間座標は節点 v_i であり、かつその上で p が成り立っている事を意味する。

さらに E T S L モデルを格子状のものに制限し、時空間のモデルと整合させる。その条件 11) ~ 13) を与える。

【定義】 性質 11) とは次のもの。

- 11) 任意の $s \in S$ に対して、 $(s, t) \in \rho(N)$ かつ $\phi(s) = \phi(t)$ なる唯一の $t \in S$ が存在する。 ■

上の t は、 s の“次時刻”にあると言う。以上より同じ空間座標を持つ世界の集合は、疑似的線形順序 $\rho(N^*)$ を持つ。ところで、条件 5) より $(s, t) \in \rho(T)$ であれば、 s と t は時間リンク N を経ず、空間リンクのみで連結出来るので、“同時刻”にあると考えられる。よって s と同時刻にある世界の集合 $\lambda(s)$ を、 $\lambda(s) = \{t \in S \mid (s, t) \in \rho(T)\}$ と定義する。以上の準備のもとで次の条件を考える。

【定義】 性質 12), 13) とは次のもの。

- 12) 任意の $s \in S$ に対して、 $\phi \upharpoonright \lambda(s)$ が全単射であり、かつ任意の $t, u \in \lambda(s)$, A

$\in LG$ に対して, $(t, u) \in \rho(A)$ ならば, $(\phi(t), \phi(u)) \in EG(A)$

13) 任意の $s, s', t, t' \in S$, 及び $A \in LG$ に対して, $(s, s') \in \rho(N)$, $(t, t') \in \rho(N)$, $(s, t) \in \rho(A)$ ならば, $(s', t') \in \rho(A)$ ■

12) より $\lambda(s)$ 中の空間リンクによる結合関係は, 空間グラフ G と同形になり, 13) より, 時間の流れの一様性が保証される.

通常のように論理式 p に対して, $M, s \models p$ なる E T S L モデル M と世界 s が存在する時, p は充足可能と定義し, $\sim p$ が充足不能の時, p は恒真と言う.

4 有限空間グラフに付随する E T S L の公理系

空間グラフ $G = \langle VG, LG, EG \rangle$ に付随する E T S L に対して, 次に公理系を示す.

[公理]

- 1) 任意の恒真な命題論理式は E T S L の公理.
- 2) $\langle a \rangle p \wedge [a] q \supset \langle a \rangle (p \wedge q)$
- 3) $\langle a; b \rangle p \equiv \langle a \rangle \langle b \rangle p$
- 4) $\langle a \cup b \rangle p \equiv \langle a \rangle p \vee \langle b \rangle p$
- 5) $\langle a \rangle (p \vee q) \equiv \langle a \rangle p \vee \langle a \rangle q$
- 6) $\langle a^* \rangle p \equiv p \vee \langle a \rangle \langle a^* \rangle p$
- 7) $\langle a^* \rangle p \supset p \vee \langle a^* \rangle (\sim p \wedge \langle a \rangle p)$
- 8) $\langle p? \rangle q \equiv p \wedge q$
- 9) $\langle (a; b)^- \rangle p \equiv \langle b^-; a^- \rangle p$
- 10) $\langle (a \cup b)^- \rangle p \equiv \langle a^- \cup b^- \rangle p$
- 11) $\langle (a^*)^- \rangle p \equiv \langle (a^-)^* \rangle p$
- 12) $\langle (p?)^- \rangle p \equiv p \wedge q$
- 13) $\langle (a^-)^- \rangle p \equiv \langle a \rangle p$
- 14) $p \supset [a] \langle a^- \rangle p$
- 15) $\bigvee (\llbracket v_i \rrbracket \text{True})$ (空間グラフ G の節点 v_i に関する選言)
 $v_i \in VG$
- 16) $\llbracket v_i \rrbracket p \equiv \llbracket v_i \rrbracket \text{True} \wedge p$

17) $v_i \neq v_j$ の時

$$[[v_i]] \text{True} \supset \sim [[v_j]] \text{True}$$

18) $\langle N \rangle p \equiv [N] p$

19) $[[v_i]] \text{True} \equiv \langle N \rangle [[v_i]] \text{True}$

20) $\langle N \rangle [[v_i]] \text{True} \equiv [[v_i]] \langle N \rangle \text{True}$

21) $\langle N \rangle \langle a \rangle p \equiv \langle a \rangle \langle N \rangle p$

22) $\langle T \rangle p \equiv \langle (\bigcup_{A_i \in LG} (A_i \cup A_i^-))^* \rangle p$

$$A_i \in LG$$

23) $[T] p \supset p$

24) $[N^*] ([[v_i]] \text{True} \supset p) \supset \langle T \rangle [[v_i]] p$

リンクcとd中に時間リンクNが出現しないとき,

25) $\langle c \rangle [[v_i]] \sim p \supset \sim \langle c \rangle [[v_i]] p$

26) $\langle c \rangle [[v_i]] p \wedge \langle d \rangle [[v_i]] q \equiv \langle c \rangle [[v_i]] (p \wedge q) \wedge \langle d \rangle [[v_i]] (p \wedge q)$

27) $\langle c \rangle p \wedge \langle T \rangle q \equiv \langle c \rangle (p \wedge \langle T \rangle q)$

28) $\langle C \rangle \langle T \rangle p \equiv \langle T \rangle p$

29) $[c] \langle T \rangle p \equiv \langle T \rangle p$

30) $\langle T \rangle [[v_i]] \langle c \rangle [[v_j]] p \equiv \langle T \rangle [[v_j]] (p \wedge \langle c^- \rangle [[v_i]] \text{True})$

31) $[[v_i]] \text{True} \supset (\bigwedge_{(v_i, v_k) \in EG(A_j)} \langle A_j \rangle [[v_k]] \text{True}) \wedge (\bigwedge_{(v_i, v_k) \in EG(A_j)} \sim \langle A_j \rangle [[v_k]] \text{True})$

$$(v_i, v_k) \in EG(A_j)$$

$$(v_i, v_k) \in EG(A_j)$$

[推論規則]

Modus Ponens (MP)

Generalization Rule (GR)

$$\frac{p, p \supset q}{q}$$

$$\frac{p}{[a] p}$$

■

公理1)~14)と推論規則は、通常のPDLの公理系である。15)~31)がETSLに固有な公理である。31)は対象としている空間グラフGに付随して決まり、Gの形状を特性化している。即ち、この公理系は空間グラフに対するスキーマでもある。

15)~17)は世界(状態)の空間座標について特性化を行っている。例えば15)は、各

世界の空間座標はグラフ G の節点のどれかであることを主張している。

18) ~ 21) は時間の特性化を行っている。18), 19) は、次の時刻の世界は必ず 1 つあり、空間座標は同じであること、21) は時間の流れの一様性を主張している。

22) ~ 24) は空間全リンク T の特性化、即ち“同時刻”の特性化を行う。23) は、ある時刻において任意の場所で p が成り立つなら、その時刻で（空間を眺めている）もとの場所でも p が成り立つことを主張している。

同様に、27) ~ 32) は N を含まないリンクを用いて“同時刻”を特性化する。29) の左辺から右辺の含意を例にとる。ある世界からリンク c で行った先が同時刻（ c 中に N が出現しないから）の節点 v_i の世界 s であり、そこで p が成り立ち、同様に d で行った先も節点 v_i の世界 t であり q が成り立つとする。ある時刻においては、1 つの空間座標に 1 つの世界しかないから、2 つの世界 s と t は同じものである。従って、そこでは p と q が両方成り立つ。以上を 29) は主張している。

さて通常のように、論理式 p がこの公理系で証明可能であることを $\vdash p$ と記す。また $\vdash \sim p$ でない論理式 p は、無矛盾であると定義する。

5 公理系の完全性と無矛盾性

前述の公理系が恒真であることは、容易に証明出来る。

【定理 1】 有限な空間グラフ G に付随する $ETSL(G)$ に対して、前述の公理系は無矛盾である。 ■

完全性に関して次が成り立つ。

【定理 2】 有限な空間グラフ G に付随する $ETSL(G)$ に対して、前述の公理系は完全である。 ■

（証明） 任意の無矛盾論理式 p が充足可能であることを示せば十分である。ところで $ETSL$ に於いては、定理 3 の有限モデルの存在定理から、充足可能性と有限な疑似モデルの存在が同値となる。従って公理系の完全性を示すには、無矛盾論理式 p に対して、必ずその疑似モデルが構築出来ることを示せばよい。以下まずその有限モデルの存在定理について略説する。本稿では紙面の都合上、証明は行わない。

まず Fischer-Ladner Closure [1, 5] を定義する。（以下、FL と略）

【定義】 論理式 p_0 の $FL(p_0)$ とは、 p_0 を含み次の条件を満たす集合 F のうち最小のものである。

- 1) $\sim p \in F \Leftrightarrow p \in F$
- 2) $p \wedge q \in F \Leftrightarrow p, q \in F$
- 3) $\langle a \rangle p \in F \Leftrightarrow p \in F$
- 4) $\langle a; b \rangle p \in F \Leftrightarrow \langle a \rangle \langle b \rangle p \in F$
- 5) $\langle a \cup b \rangle p \in F \Leftrightarrow \langle a \rangle p, \langle b \rangle p \in F$
- 6) $\langle a^* \rangle p \in F \Leftrightarrow \langle a \rangle \langle a^* \rangle p \in F$
- 7) $\langle p? \rangle p \in F \Leftrightarrow p, q \in F$
- 8) $\langle (a; b)^- \rangle p \in F \Leftrightarrow \langle b^- \rangle \langle a^- \rangle p \in F$
- 9) $\langle (a \cup b)^- \rangle p \in F \Leftrightarrow \langle a^- \rangle p, \langle b^- \rangle p \in F$
- 10) $\langle (a^*)^- \rangle p \in F \Leftrightarrow \langle a^- \rangle \langle (a^-)^* \rangle p \in F$
- 11) $\langle (p?)^- \rangle q \in F \Leftrightarrow p, q \in F$
- 12) $\langle (a^-)^- \rangle p \in F \Leftrightarrow \langle a \rangle p \in F$
- 13) $[\forall i] p \in F \Leftrightarrow p \in F \quad \blacksquare$

この時、 $FL(p_0)$ の濃度は、有限であることが容易に示される [1, 2, 3, 5] .

【定義】 性質 1)~5), 12), 13), 及び次の 6')~11'), を満し、かつ $\pi(p) \neq \emptyset$ である構造 M を、 p の疑似モデルと呼ぶ。

- 6') $p \in FL(p_0) \Leftrightarrow p$ に対して性質 6) が成り立つ。
- 7') $\sim p \in FL(p_0) \Leftrightarrow \sim p$ に対して性質 7) が成り立つ。
- 8') $p \wedge q \in FL(p_0) \Leftrightarrow p \wedge q$ に対して性質 8) が成り立つ。
- 9') $\langle a \rangle p \in FL(p_0) \Leftrightarrow \langle a \rangle p$ に対して性質 9) が成り立つ。
- 10') $[\forall i] p \in FL(p_0) \Leftrightarrow [\forall i] p$ に対して性質 10) が成り立つ。
- 11'-a) 任意の $s \in S$ に対して、 $(s, t) \in \rho(N)$, かつ $\psi(s) = \psi(t)$ なる $t \in S$ が幾つか存在する。
- b) 任意の $\langle N \rangle p \in FL(p_0)$ に対して、 $M, s \models \langle N \rangle p$ ならば、
 $(s, t) \in \rho(N)$ なる任意の $t \in S$ において、 $M, t \models p \quad \blacksquare$

このとき、次の定理が成り立つ。

【定理3】 (有限モデルの存在定理)

有限な空間グラフ G が与えられている場合、 $ETSL(G)$ の任意の論理式 p に対して次の条件は同値である。

- 1) p が充足可能。
- 2) p の疑似モデル M が存在する。但し M の世界集合 S の濃度は有限 ■

(証明)

[2, 3]を参照して戴きたい。類似の証明としては[1, 5]がある。基本的アイデアは、 $FL(p_0)$ 中の論理式の真偽に関する同値関係による商構造の生成である[1, 3, 5]。 ■

以上の定理のもとで完全性の証明を行う。

【定義】 p_0 を無矛盾論理式、 $FL(p_0) = \{p_1, \dots, p_k\}$ であるとする。このとき、 $FL(p_0)$ 、空間グラフ G の節点 v_i に対する $vi-Atom$ とは、 $[[v_i]](q_1 \wedge \dots \wedge q_k)$ なる形をした論理式のことである。但し、各 q_i は p_i または $\sim p_i$ である。 $FL(p_0)$ 、 G の $L-Atom$ とは、任意の $vi-Atom$ を言う。 $vi-Atom$ 、 $L-Atom$ の集合を、それぞれ $vi-ATOM(p_0)$ 、 $L-ATOM(G, p_0)$ であらわす。また G 、 p_0 が明らかな時は省略する。 ■

このとき、まず $L-ATOM$ から世界集合 λ を次のように定義する。

【定義】 位数 d の空間グラフ G 、 $FL(p_0)$ に対して、世界集合 λ とは、直積

$$Z(G, p_0) = v_1-ATOM \times v_2-ATOM \times \dots \times v_d-ATOM \quad (\text{但し、} v_i \text{ は } G \text{ の節点})$$

の元である。また G 、 p_0 が明らかな時は省略する。 ■

λ の定義は順序対であるが、順序は無視しても混乱は生じないので、以下では適宜、集合として考える。さて同一の $L-Atom$ が Z 中の複数の世界集合に出現する。ここではこの出現を区別したい。そこで混乱防止のため、 Z の元、及び λ の元をそれぞれ番号付けしておく。まず Z は有限個の元しか持たないので、自然数で番号付ける。番号 m を持つ λ を λ_m と記す。さて λ の元の番号付けであるが、 Z の番号の集合を μ とし、直積 $S_Z = \mu \times \{1, \dots, d\}$ (但し d は空間グラフの位数)を考える。この上で関数 $\delta; S_Z \rightarrow L-ATOM$ を次のように定義し、 $\langle m, i \rangle \in S_Z$ に $L-Atom$ を付加させる。

$\delta(\langle m, i \rangle) = \delta i(\lambda_m)$ (但し $\delta i: Z \rightarrow vi\text{-ATOM}$ は、直積 Z の標準射影.)

以上で λ_m に出現する $vi\text{-atom}$ を、順序対 $\langle m, i \rangle \in S_Z$ で番号付けした。この時 λ_m は、 $\lambda_m = \{\langle m, 1 \rangle, \langle m, 2 \rangle, \dots, \langle m, d \rangle\}$ と書ける。また $\delta(\langle m, i \rangle)$ を $\llbracket vi \rrbracket \alpha_{mi}$ と略記する。

さて次に世界集合 λ_m を E T S L の論理式で特性化することを考える。 $\lambda_m = \{\langle m, 1 \rangle, \langle m, 2 \rangle, \dots, \langle m, d \rangle\}$ であるとき、次の連言 Θ_m を λ_m の特性式と言う。

$$\Theta_m = \bigwedge \langle T \rangle \llbracket vi \rrbracket (\alpha_{mi} \wedge (\bigwedge \langle Aj \rangle \llbracket vk \rrbracket \alpha_{mk}))$$

$$vi \in VG \quad (vi, vk) \in EG(Aj)$$

【定義】 その特性式 Θ_m が無矛盾である世界集合 λ_m を、同時刻世界集合と言う。同時刻世界集合 λ_m の集合を Z_λ とあらわす。 ■

この時、 $S_{Z_\lambda} \subseteq S_Z$ を、 $S_{Z_\lambda} = \{\langle m, i \rangle \in S_Z \mid \lambda_m \text{ は同時刻世界集合}\}$ と定義しておく。更に、 S_Z の元 $\langle m, i \rangle$ に対してもその特性式 β_{mi} を、

$$\beta_{mi} = \llbracket vi \rrbracket \alpha_{mi} \wedge \Theta_m$$

と定義しておく。これにより、 S_Z の元は E T S L 論理式で一意に区別出来る。このとき、次の補題が成り立つ。

【補題 1】 任意の $\langle m, i \rangle \in S_Z$ に対して、次の条件は同値である。

- 1) $\langle m, i \rangle \in S_{Z_\lambda}$
- 2) その特性式 β_{mi} は無矛盾である。 ■

(証明) 1) から 2) の証明は、 Θ_m の定義と公理 26, 29 から背理法で行える。容易なので省略する。次に 2) を仮定したとき、 β_{mi} の定義から Θ_m は無矛盾である。従って定義より、 $\langle m, i \rangle \in S_{Z_\lambda}$ 。 ■

補題 2 より $\langle m, i \rangle \in S_{Z_\lambda}$ の特性式 β_{mi} は無矛盾である。従って $\llbracket vi \rrbracket \alpha_{mi} (= \llbracket vi \rrbracket (q_1 \wedge \dots \wedge q_n))$ も無矛盾となるので、任意の $p \in FL(p_0)$ に対して、 $\beta_{mi} \leq p$ 、もしくは $\beta_{mi} \leq \sim p$ どちらか一方が必ず成り立つ。

p_0 に対する疑似モデル M を構成するため、更に同時刻世界集合 λ_m, λ_n 間の時間関係 ρ_N を以下のように定義する。

【定義】 関係 $\rho_N \subseteq Z_\lambda \times Z_\lambda$ は次の条件を満たす最小のものである。

$\lambda m, \lambda n \in Z_\lambda$ の特性式 $\Theta m, \Theta n$ に対して, $\Omega mn = \Theta m \wedge \langle N \rangle \Theta n$ が無矛盾であるならば, $(\lambda m, \lambda n) \in \rho_N$ ■

注) 以下, $(s, t) \in \rho(a)$ を $s \rightarrow^a t$ と略記する.

以上の準備のもとで無矛盾論理式 p_0 に対して構造 $M = \langle S, \models, \rightarrow, \phi \rangle$ を次のように構成する. まず S と ϕ は次のもの.

$$S = S_{Z_\lambda}$$

$$\phi: S \rightarrow VG, \phi(\langle m, i \rangle) = v_i$$

また, \models, \rightarrow (即ち π, ρ) は, 次のように $\Phi_0, \Sigma 1$ に対して定義したもののものを, 性質 1)~5), 6')~10') を満たすように拡張したものである.

- a) $P \in \Sigma_0$ に対して $\beta mi \leq P$ ならば, $M, \langle m, i \rangle \models P$
- b) $A \in LG$ に対して $m = n$, かつ $(v_i, v_j) \in EG(A)$ ならば, $\langle m, i \rangle \rightarrow^A \langle n, j \rangle$
- N に対して $i = j$, かつ $(\lambda m, \lambda n) \in \rho_N$ ならば, $\langle m, i \rangle \rightarrow^N \langle n, j \rangle$

このとき上記のように構成した構造 M が, 無矛盾論理式 p_0 の疑似モデルとなることを次の方針で証明する.

まず一般に任意の $p \in FL(p_0)$ に対して, S_{Z_λ} が有限, 各 βmi が有限長であることから, 次が構成的に証明出来る.

$$\vdash p \equiv \bigvee \beta mi$$

$$\langle m, i \rangle \in S_{Z_\lambda}$$

$$\text{かつ } \beta mi \leq p$$

従って p が無矛盾ならば, 少なくとも1つ無矛盾かつ $\beta mi \leq p$ なる, ある $\langle m, i \rangle \in S_{Z_\lambda}$ の特性式が存在する. 補題 1 から, これは S_{Z_λ} の元の特性式となる.

以上この事実を用いれば, p_0 は無矛盾であるから, 少なくとも1つ $\beta mi \leq p_0$ なる, ある $\langle m, i \rangle \in S_{Z_\lambda}$ の特性式が存在することがわかる. 定義より, この $\langle m, i \rangle$ は構造 M の世界集合 S の元となる. 更に次のことを示す.

【補題 2】 任意の $p \in FL(p_0)$ と $\langle n, j \rangle \in S$ に対して次は同値である.

- 1) $M, \langle n, j \rangle \models p$

$$2) \quad \beta nj \leq p \quad \blacksquare$$

これより前述した $\langle m, i \rangle$ に於いて, $M. \langle m, i \rangle \models p_0$ となることが保証される.

また M が性質 1)~5), 6')~10'), 12), 13) を満たすことは定義より明らかである. 従って 11') を満たすことを示せば, M が疑似モデルであることが示される.

以上で, M は p_0 に対する疑似モデルとなることが保証され, 有限モデルの存在定理から無矛盾論理式 p_0 の充足可能性が保証されることになる.

まず補題 2 の証明のため, 構造 M の定義の性質を調べておく.

【補題 3】 任意の $A \in \Sigma_1$ に対して, 次の条件は同値である.

$$1) \quad \langle m, i \rangle \rightarrow^A \langle n, j \rangle$$

$$2) \quad \beta mi \wedge \langle A \rangle \beta nj \text{ が無矛盾} \quad \blacksquare$$

(証明) 証明は割愛させて戴く. [2] を参照して戴きたい. \blacksquare

更に次の補題を証明する.

【補題 4】 任意の $a \in \Sigma$, および $\langle m, i \rangle, \langle n, j \rangle \in S$ に対して, $\beta mi \wedge \langle a \rangle \beta nj$ が無矛盾ならば, $\langle m, i \rangle \rightarrow^a \langle n, j \rangle \quad \blacksquare$

(証明) 証明は [1] と同様に出来る. 詳細は [2] を参照して戴きたい. \blacksquare

次に補題 4 を用いて次を証明する.

【補題 5】 任意の無矛盾論理式 $\langle a \rangle p \in FL(p_0)$, $\langle m, i \rangle \in S$ に対して, 次は同値である.

$$1) \quad \beta mi \leq \langle a \rangle p$$

$$2) \quad \text{ある } \langle n, j \rangle \in S \text{ が存在して, } \langle m, i \rangle \rightarrow^a \langle n, j \rangle, \beta nj \leq p \quad \blacksquare$$

(証明) この証明も [1] と同様であり割愛させて戴く. [2] を参照して戴きたい. \blacksquare

以上の準備のもとで補題 2 は次のように論理式 p の構造に関する帰納法で証明出来る.

$p = Q$ の時, 構造 M の定義より明らか.

$p = q \wedge r, \sim q$ の時も明らか.

$p = \llbracket vj \rrbracket q$ の場合, まず $M. \langle m, i \rangle \models \llbracket vj \rrbracket q$ と仮定する. 構造 M の定義より, $vi = vj$ であり, かつ $M. \langle m, i \rangle \models q$. よって,

$$\textcircled{1} \quad \vdash \beta mi \supset q \quad (\text{帰納の仮定})$$

② $\vdash \beta mi \supset [vi] q$ (①, 公理16, MP)

従って, $\beta mi \leq [vj] q$.

逆に, $\beta mi \leq [vj] q$ とする. この時, 公理16より $\beta mi \leq q$. 従って帰納の仮定より, $M. \langle m, i \rangle \models q$. 同様に $\beta mi \leq [vj] \text{True}$. このとき $vi \neq vj$ ならば, 公理17より, $\beta mi \leq \sim [vj] \text{True}$ となるから βmi の無矛盾性に反する. 従って, $vi = vj$. 以上より, $M. \langle m, i \rangle \models [vj] q$.

$p = \langle a \rangle q$ の場合,

① $\beta mi \leq \langle a \rangle q$, であることと,

② ある $\langle n, j \rangle \in S$ が存在して, $\langle m, i \rangle \rightarrow^a \langle n, j \rangle$, $\beta nj \leq \langle a \rangle q$

であることは, 補題5より同値である. 更に, ②と

③ ある $\langle n, j \rangle \in S$ が存在して, $\langle m, i \rangle \rightarrow^a \langle n, j \rangle$, $M. \langle n, j \rangle \models q$

となることは帰納の仮定より同値である. ③と

④ $M. \langle m, i \rangle \models \langle a \rangle q$

は明らかに同値である. 従って, ①と④は同値であり, 補題2は証明出来た.

次に構造 M が性質11')を満たすことを証明する.

(証明)

11')-a) に関しては, 任意の $\lambda m \in Z_\lambda$ に対して, Ωmn が無矛盾となる $\lambda n \in Z_\lambda$ が必ず存在することを示せばよい. 存在しないと仮定する. 任意の $\lambda n \in Z_\lambda$ に関して, その Ωmn が矛盾するから, 次の連言が証明出来る.

① $\vdash \wedge \sim (\Theta m \wedge \langle N \rangle \Theta n)$

$\lambda m \in Z_\lambda$

② $\vdash \sim (\Theta m \wedge \langle N \rangle (\vee \Theta n))$ (①, 公理5)

$\lambda m \in Z_\lambda$

$\vee \Theta m = \text{True}$ であるので公理 15, 19より, $\vdash \sim \Theta m$ となり,
 $\lambda m \in Z_\lambda$

$\lambda m \in Z_\lambda$ に反するので矛盾が導けた.

11')-b) に関しては次のように証明出来る.

$\langle m, i \rangle \rightarrow N \langle n, j \rangle$, $M. \langle m, i \rangle \models \langle N \rangle p$ であるとする。補題3より $\beta m i \wedge \langle N \rangle \beta n j$ が無矛盾。このとき補題2より① $\vdash \beta m i \supset \langle N \rangle p$ である。この時、 $M. \langle n, j \rangle \models \sim p$ であると仮定すると、

② $\vdash \beta n j \supset \sim p$ (①, 補題2)

③ $\vdash \langle N \rangle p \supset \sim [N](\bigvee_{nj} \alpha_{nj} \wedge \Theta n)$ (②, GR)

④ $\vdash \beta m i \supset \sim [N](\bigvee_{nj} \alpha_{nj} \wedge \Theta n)$ (①, ③, MP)

⑤ $\vdash \sim \beta m i \vee \sim \langle N \rangle \beta n j$ (④, 公理18)

となり矛盾する。 ■

以上で構造Mが p_0 に対する疑似モデルであることが証明された。以上で公理系の完全性が証明が終了した。

6 まとめ 本稿では時空間様相論理ETSLを示し、完全無矛盾な公理系を示した。ETSLのモデル論的考察は本稿では割愛する[2,3]。今後、実際のシステムの記述、検証によりETSLの有用性を確認したい。また時間の流れの非一様性を仮定した場合の論理体系、変数を含んだ体系の研究が大きな問題として残っている。

参考文献

- [1] D.Kozen, R.Prikk: An Elementary Proof of the Completeness of PDL, Theoret. Comput. Sci. 14, pp.113-118, 1981
- [2] 岩沼, 原尾, 野口: 時空間様相論理の完全・無矛盾な公理系, 信学技報, AL84-52, 1984
- [3] 岩沼, 原尾, 野口: 時空間論理理論ETSLとその決定問題, 発表予定
- [4] J.Reif, A.P.Sistla: A Multiprocess Network Logic with Temporal and Spatial Modalities, Lect Notes in Comp Sci. 154, pp.629-639, 1983
- [5] M.J.Fischer, R.E.Ladner: Propositional Dynamic Logic of Regular Programs, J.Comput.System Sci. 18, pp.194-211, 1979